FACHBEREICH MATHEMATIK

A Stoffprogramm

Arithmetik

Bereich	*Kompetenzen*	*Inhalte*
Algebra	Sicherheit im Umgang mit Termumformungen, Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen	Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten; quadratische Gleichungen und ihre Lösungen (auch Bruch-, Wurzel- und biquadratische Gleichungen, die auf quadratische Gleichungen führen); Rechnen mit Potenzen und Wurzeln; Anwendungen in einfachen Textaufgaben
(Lineare) Funktionen	Funktionsbegriff verstehen; (Anti-) Proportionalität und lineare Funktionen mit Spezialfällen kennen und anwenden	Funktionsbegriff als eindeutige Zuordnung; verschiedene Darstellungsformen von Funktionen (Funktionsgleichung, Wertetabelle, Koordinatensystem); Proportionalität und Antiproportionalität; anwendungsbezogene Beispiele von Funktionen; Steigung und Achsenabschnitte einer linearen Funktion; lineare Funktionsgleichung aus zwei Punkten; Schnitt zweier Geraden; Textaufgaben
Quadratische Funktionen	Quadratische Funktionen kennen und anwenden	Grafische Darstellung von Parabeln; Bestimmung von Nullstellen und Scheitel; einfache Extremwertaufgaben
Kombinatorik	Bei geringer Anzahl von Möglichkeiten: diese systematisch und vollständig aufzählen; bei grosser Anzahl von Möglichkeiten: entsprechende Formeln anwenden	Baumdiagramme mit Pfadregeln; Urnenmodelle; geordnete und ungeordnete Stichproben mit und ohne Wiederholung; $n!$, n^k; $n!/(n-k)!$; $n!/[k!(n-k)!]$
Wahrscheinlichkeit	Begriff der Wahrscheinlichkeit erfassen; Wahrscheinlichkeiten in einfachen Experimenten berechnen	Begriffe Zufallsexperimente, Ergebnisraum, Wahrscheinlichkeit; sicheres/ unmögliches Ereignis; Gegenereignis; bei Gleichverteilung: P = (Anzahl günstige Fälle):(Anzahl mögliche Fälle); Bernoulli-Experimente; Binomialverteilung
Statistik	Statistiken lesen; Datenerhebung, Auswertung und geeignete Darstellung der Ergebnisse durchführen	Darstellungsformen (z.B. Tabelle, Stabdiagramm, Kreisdiagramm); Mittelwert; Erwartungswert; Standardabweichung
Exponentialfunktionen und Logarithmus	Unterschied zwischen linearen und exponentiellem Wachstum erkennen und Berechnungen durchführen	Zins und Zinseszins; Exponentialgleichungen vom Typ $a = b^x$; exponentielles Wachstum: ermitteln des Wachstumsfaktors oder der Zeit bis ein bestimmtes Wachstum erreicht ist; Bakterienvermehrung; Radioaktiver Zerfall; Halbwertszeit

Geometrie

Bereich	*Kompetenzen*	*Inhalte*
Stereometrie	Oberflächen und Volumina geometrischer Körper berechnen können	Volumen und Oberfläche von Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel und Kugel
Trigonometrie	Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck, sowie Sinus- und Kosinussatz kennen und anwenden	Definition von sin, cos, tan als Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck und im Einheitskreis; Berechnungen im rechtwinkligen und im allgemeinen Dreieck und praktische Anwendungen

B Eintrittsvoraussetzungen (erwartetes Vorwissen)

Arithmetik

Bereich	*Kompetenzen*	*Inhalte*
Mengen	Die wichtigsten Begriffe und Symbole aus der Mengenlehre kennen; Zahlenmengen kennen	Mengen und ihre Elemente, Teilmenge, leere Menge, Schnittmenge, Vereinigungsmenge, Differenzmenge; Darstellung im Mengendiagramm; natürliche, ganze und rationale Zahlen
Algebra	Sicherer Umgang mit einfachen Rechnungen und Termumformungen; Lösung von einfachen (Un-)Gleichungen	Rechnen mit natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen (Dezimal- und echte Brüche); Rechnen mit einfachen Potenzen und Wurzeln; Termumformungen, binomische Formeln und Faktorzerlegungen; grösster gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches; Gleichungen und Ungleichungen ersten Grades mit einer Variablen lösen; Gleichungen zu gegebenen Situationen aufstellen, lösen und interpretieren; Umgang mit Grössen und Einheiten (Zeiten, Längen, Flächen, Volumina, …)
Funktionen	Grafische Darstellung von Funktionen	Funktionsdarstellung in einem kartesischen Koordinatensystem und Interpretation eines Graphen

Geometrie

Bereich	*Kompetenzen*	*Inhalte*
Satz des Pythagoras	Satz des Pythagoras in zwei- und drei-dimensionalen Figuren anwenden können	Anwendung des Satzes des Pythagoras in praktischen Aufgaben; Raumdiagonale im Würfel und Quader bei gegebener Länger der Seitenkanten
Planimetrie, Stereometrie	Eigenschaften ebener Figuren kennen und Berechnungen durchführen; Konstruktionen von Drei- und Vierecken; Oberflächen und Volumina einfacher Körper berechnen	Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken mit Spezialfällen; Konstruktionen von Dreiecken und Vierecken mit Zirkel und Lineal; Umfang und Flächeninhalt von Dreieck, Viereck und Kreis Berechnung von Oberflächen und Volumina einfacher Körper, wie z.B. Würfel oder Quader
Strahlensätze	Strahlensätze und den Begriff der Ähnlichkeit kennen und anwenden	Erster und zweiter Strahlensatz in praktischen Aufgaben anwenden; Begriff Streckungsfaktor und zentrische Streckung kennen und anwenden; ähnliche Figuren erkennen

C Rahmenbedingungen

Prüfung schriftlich:	120 Minuten
Geprüfte Themen:	Stoffinhalte aus Abschnitt A
Bewertung:	Lösungsweg und Ergebnis
Hilfsmittel:	nicht-programmierbarer Taschenrechner, Formelsammlung

D Literaturhinweise

Die TeilnehmerInnen des AbS müssen für Mathematik keine Bücher anschaffen. Sie bekommen die Unterrichtsmaterialien gestellt. Für alle diejenigen, welche sich selbständig auf die Aufnahmeprüfung vorbereiten wollen gilt folgende Regelung:
Die oben genannten Inhalte können mit Mathematik-Büchern bzw. Lehrmitteln ihrer Wahl durchgearbeitet bzw. repetiert werden. Folgende Bücher enthalten beispielsweise Zusammenfassungen zu einer Vielzahl der oben erwähnten Inhalte:

- Formelsammlung Mathematik. Gymnasium; Klett, 2005;
  ISBN: 978-3-12-718510-2
- Duden. Schülerduden. Mathematik 1: Das Fachlexikon von A-Z für die 5. bis 10. Klasse von Bibliographisches Institut, Mannheim (3. Februar 2011),
  ISBN 978-3411042098
- Duden Basiswissen Mathematik: 5. bis 10. Klasse von Günther Rolles und Michael Unger von Bibliographisches Institut, Mannheim (19. August 2010), ISBN 978-3411715046
- Duden. Schülerduden. Mathematik 2: Ein Lexikon zur Schulmathematik für das 11. bis 13. Schuljahr. Rund 1000 Stichwörter... von Harald Scheid und Dieter Kindinger von Bibliographisches Institut, Mannheim (1. Januar 2004), ISBN 978-3411042753
- PONS Das Große Übungsbuch Mathematik, 5. - 10. Klasse: Der komplette Lernstoff in 900 Übungen von Unbekannt von Klett (Juni 2011), ISBN 978-3125617971
- Lambacher Schweizer 9/10; Grundlagen der Mathematik für Schweizer Maturitätsschulen, Klett und Balmer Verlag Zug, ISBN 978-3-264-83982-1
- Lambacher Schweizer 11/12; Grundlagen der Mathematik für Schweizer Maturitätsschulen, Klett und Balmer Verlag Zug, ISBN 978-3-264-83983-8

E Beispielaufgaben

Algebra

1. Gegeben ist das folgende Gleichungssystem: $\left| \begin{array}{c} y = -2{,}5x + 3 \\ x = 0{,}5y \end{array} \right|$
   a) Lösen Sie das Gleichungssystem möglichst exakt zeichnerisch.
   b) Lösen Sie das Gleichungssystem rechnerisch und vergleichen Sie mit a).
2. Bestimmen Sie rechnerisch die Lösungsmenge der Gleichung $2y = 7 - \sqrt{4y+1}$.
3. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt 34,56 cm^2, seine Hypothenuse ist 12 cm lang. Wie lang sind die beiden Katheten?
4. Zerlegen Sie die Zahl 24 so in zwei Summanden, dass die Summe der Quadrate der Summanden möglichst klein wird.
5. Fassen Sie so weit wie möglich zusammen (ohne Bruch und Divisionszeichen):
   $$\frac{u^{n+1}}{v^m} \cdot \frac{v^{m-1}u^n}{\left(u^{-1}v\right)^2}$$
6. Schreiben Sie mit einem Wurzelzeichen und ohne negative Exponenten: $\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{a}}}$

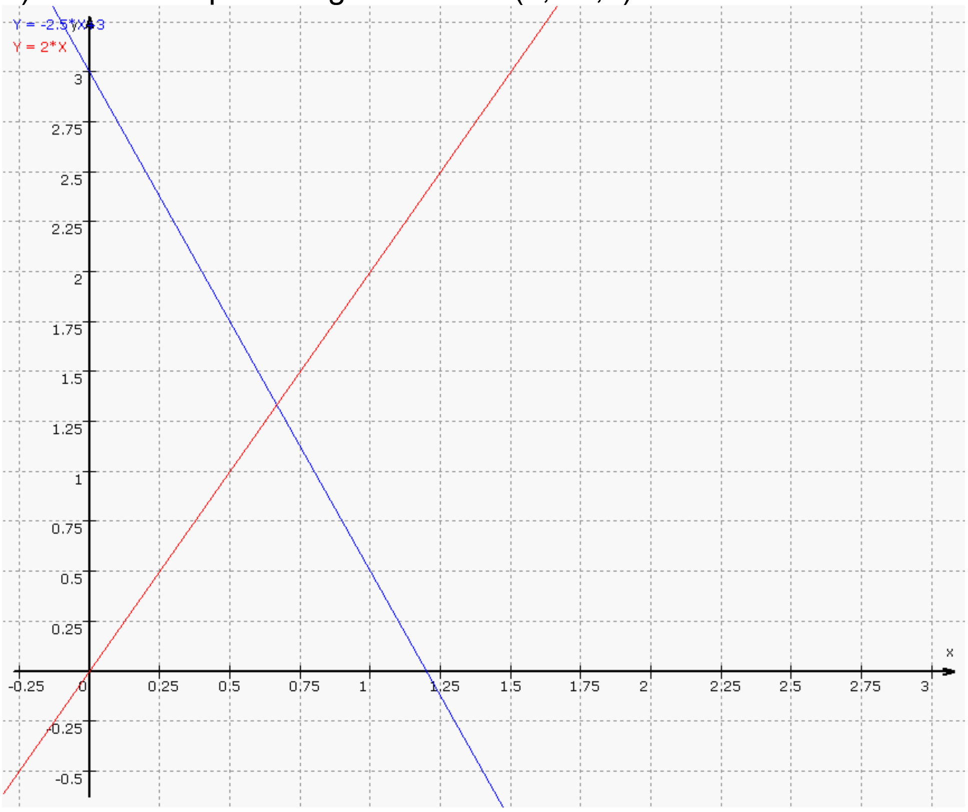
7. Auf wie viele Arten kann man 10 verschiedene Gegenstände in einen Setzkasten mit 12 Kästchen verteilen, wenn man sich dafür interessiert, welcher Gegenstand in welchem Kästchen liegt?
8. In einer Urne befinden sich 4 rote und 5 grüne Kugeln. Es werden vier Kugeln mit einem Griff gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine grüne Kugel zu ziehen.
9. Sie setzen beim Roulette auf das Ereignis „ungerade Zahl“. Alle Sektoren der Zahlen 0 bis 36 sind gleich gross. Sie zahlen 10 Franken Einsatz. Ihr Reingewinn beträgt 10 Franken, wenn sie gewinnen. Wenn Sie verlieren, ist ihr Einsatz verloren. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung.
10. Sie kaufen 12 Stück eines Artikels aus Massenproduktion. 85% dieser Artikel sind erste Wahl, der Rest zweite Wahl. Aufgrund der Verpackung kann man nicht erkennen, ob der Artikel erste oder zweite Wahl ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau 10 Artikel erste Wahl?
11. Angenommen einer Ihrer Urahnen habe vor 185 Jahren ein seltenes Sammlerstück für 10 Fr. gekauft, welches immer noch in Familienbesitz ist und dessen Wert sich jedes Jahr um 5% erhöht hat.
    a) Wie viel Wert hätte dieses Sammlerstück heute?
    b) Um wie viel Prozent müsste der Wert jährlich zunehmen, damit es heute 500'000 Franken kosten würde?
12. Bestimmen Sie die Halbwertszeit von ‚Kohlenstoff 14’, also die Zeitdauer, wie viele Jahre es dauert, bis nur noch die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Menge existiert. Innerhalb eines Jahres nimmt die Menge von ‚Kohlenstoff 14’ um 0,012% ab. (Lösungsweg!)

Geometrie

13. Ein kegelförmiger Messbecher ist 20 cm hoch und hat oben den inneren Radius 12 cm. Der Messbecher ist mit einer bestimmten Menge Wasser gefüllt. Markiert man den Wasserstand an der Becherwand, so ist diese Markierung 8 cm vom Fuss des Messbechers entfernt (d.h. der Abstand auf der Mantellinie von der Markierung bis zur Kegelspitze beträgt 8 cm). Wie viel Liter oder Milliliter Wasser befinden sich im Messbecher?
14. Welches Volumen, welchen Durchmesser und welche Oberfläche hat eine Kugel der Masse 10,0 kg aus Glas der Dichte 2,5 g/cm^3?
    Anmerkung: Die Kugel ist nicht hohl, sondern massiv aus Glas.
15. Ein Flugzeug hebt an einem Punkt P auf dem Flughafengelände ab und steigt unter einem gleichmässigen Winkel von 7° an. In welcher Höhe überfliegt das Flugzeug einen 28 km entfernten Punkt Q?
16. Einem Kreis mit dem Radius r = 6 cm ist ein regelmässiges Achteck einbeschrieben. Berechnen Sie dessen Umfang.
17. Berechnen Sie die unbekannten Seiten und Winkel des (nicht rechtwinkligen) Dreiecks. a = 6 m; b = 5 m; $\beta = 40°$
18. Berechnen Sie mit Hilfe des Kosinussatzes die unbekannte Seite des (nicht rechtwinkligen) Dreiecks. a = 76.4 m; b = 43.8 m; $\gamma = 68.6°$

Lösungen

1.
   a) Der Schnittpunkt liegt etwa bei S(0,7/1,3)



   b) Einsetzungsverfahren: y = -2,5(0,5y) + 3 → y = 4/3 → x = 2/3 → $L=\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{4}{3}\right)$

2. $\sqrt{4y+1}=7-2y$ → $4y+1=(7-2y)^2=49-28y+4y^2$ → $0=4y^2-32y+48$
   → Lösungsformel für quadratische Gleichungen
   → $L=\{2\}$ (6 ist keine Lösung der Wurzelgleichung→ Probe!)

3. Es gilt (1) $x^2 + y^2 = 12^2$ und (2) $\frac{xy}{2}=34{,}56$ → (2) nach y auflösen → Einsetzungsverfahren
   → $x^4 - 144x^2 + 4777{,}5744 = 0$ → Substitution $z = x^2$ → Lösungsformel und Resubstitution → Die Seiten betragen 9,6 cm und 7,2 cm.

4. $f(x) = x^2 + (24-x)^2 = 2x^2 - 48x + 576 = 2(x-12)^2 + 288$ → S(12/288) → Das Minimum wird angenommen, wenn die Zahl 24 in 12 +12 zerlegt wird und beträgt 288.

5. $u^{2n+3}v^{-3}$

6. $\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=a^{-\frac{1}{6}}=\frac{1}{\sqrt[6]{a}}$

7. $\frac{12!}{(12-10)!}=239500800$ Möglichkeiten

8. $1-\frac{\binom{4}{4}}{\binom{9}{4}}=1-\frac{1}{126}=\frac{125}{126}$

9. E(X) = $-10 \cdot \frac{19}{37} + 10 \cdot \frac{18}{37} = -\frac{10}{37}$

   V(X) = $\left(-10 + \frac{10}{37}\right)^2 \cdot \frac{19}{37} + \left(10 + \frac{10}{37}\right)^2 \cdot \frac{18}{37} \approx 99{,}927$ → $\sqrt{v(x)} \approx 9{,}996$

10. $\binom{12}{10} \cdot 0{,}85^{10} \cdot 0{,}15^2 = 0{,}292$ → ca. 29,2% Wahrscheinlichkeit

11.
    a) $10 \cdot 1{,}05^{185} = 83180{,}27$ Fr. $\approx$ 83180,25 Fr.
    b) $500000 = 10 \cdot a^{185}$ → a = 1,06023 → um ca. 6%

12. Wachstumsfaktor: a = 0,99988 → $0{,}99988^x = 0{,}5$ → x = log(0,5)/log(0,99988) = 5775,88 → etwa 5776 Jahre

13. s = 23,32 cm → Strahlensatz: $s/r = s_1/r_1$ → $23{,}32/12 = 8/r_1$ → $r_1 = 4{,}12$ cm
    → $h_1 = 6{,}86$ cm → V = 121,7 cm ^{3} → 121,7 ml

14. V = 4000 cm^3; d = 19,69 cm; O = 1218,59 cm^2

15. tan7° = h/28000 m → h = 3438 m

16. Wenn man vom Kreismittelpunkt zu jeder Ecke des Achtecks den Radius einzeichnet, so entstehen 8 gleichschenklige Dreiecke mit dem Mittelpunktswinkel 45°. Zeichnet man die Höhe zur Basis in eines dieser Dreiecke ein, so entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke und der Mittelpunktswinkel wird halbiert auf 22,5°.
    → sin 22,5° = x/6 → x = 2,3 cm (halbe Achteckseite) → U = 36,74 cm.

17. Lösung nicht eindeutig, weil die die kürzere Seite dem gegebenen Winkel gegenüber liegt:
    1. Lösung: $\frac{5}{sin40°} = \frac{6}{sin\alpha} \rightarrow \alpha_1 = 50{,}47°; \gamma_1 = 89{,}53°; c_1 = 7{,}78cm$
    2.Lösung: $\alpha_2 = 180° - 50{,}47° = 129{,}53°; \gamma_2 = 10{,}47°; c_2 = 1{,}41cm$

18. $c^2 = 76{,}4^2 + 43{,}8^2 - 2 \cdot 76{,}4 \cdot 43{,}8 \cdot cos68{,}6° \rightarrow c = 72{,}89m$

Es folgt eine Beispielprüfung in Mathematik:

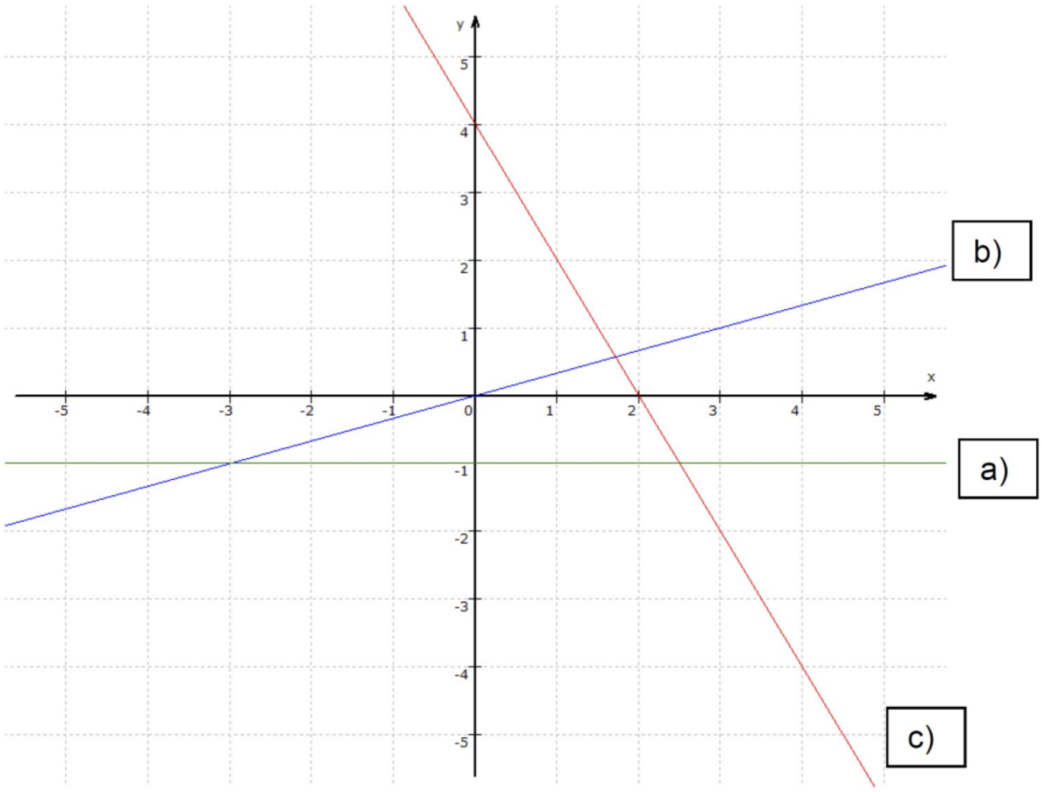
Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Erlaubte Hilfsmittel: **nicht programmierbarer Taschenrechner, Formelsammlung**
- Schreiben Sie Ihren Namen und die Seitenzahl auf jedes Blatt.
- Die Lösungsgedanken und einzelnen Schritte müssen sauber, übersichtlich und mathematisch korrekt dargestellt werden.
- Brüche müssen in den Resultaten stets gekürzt sein. Dezimalzahlen sind der Aufgabe entsprechend sinnvoll zu runden (im Allgemeinen 2 Stellen nach dem Komma).

☺ ☺ ☺ *Viel Erfolg!!!* ☺ ☺ ☺

Zeitlimit: 120 Minuten

1) Wie lauten die Funktionsgleichungen zu den drei unteren Graphen? (2 P)

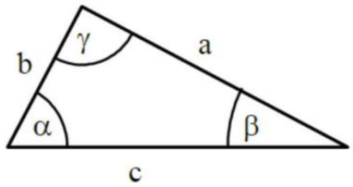


2) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem rechnerisch und geben Sie die Lösungsmenge korrekt an:

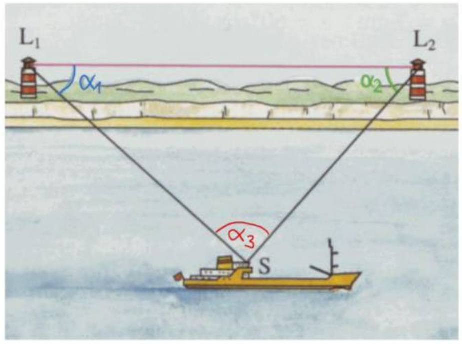
$$\left| \begin{array}{ll} \text{I} & 12x - 8y = 28 \\ \text{II} & 15x - 35 = 10y \end{array} \right| \qquad (2{,}5\ \text{P})$$

3) Lösen Sie die folgende Aufgabe mit Hilfe eines Gleichungssystems rechnerisch: Großvater und Enkel sind heute zusammen 78 Jahre alt. Vor 4 Jahren war der Opa sechsmal so alt wie sein Enkel. Wie alt sind beide heute? (3 P)

4) In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sind $\gamma = 90°$, die Hypotenuse c = 100 m und die Kathete b = 45 m gegeben. Berechnen Sie die Seite a sowie die Winkel α und β. Die Skizze ist nicht massstabsgetreu! (2,5 P)



5) Von zwei Leuchttürmen L_1 und L_2, die 7km voneinander entfernt sind, wird ein Schiff S angepeilt. Man misst die Winkelweiten $\alpha_1 = 42°$ und $\alpha_2 = 55°$ (siehe Skizze).
   a) Bestimmen Sie die Entfernung des Schiffes vom Leuchtturm L_1. (2 P)
   b) Warum kann es in diesem Fall keine zweite Lösung geben? (0,5 P)

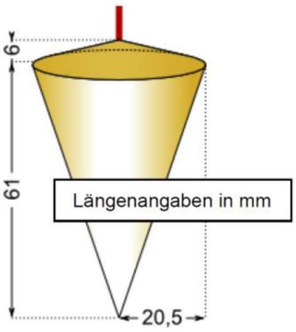


6) Das Schaubild einer quadratischen Funktion ist gestaucht mit $a = 0{,}5$ und hat den Scheitel $S(-3/8)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung in beiden Formen:
$y = a(x-d)^2 + e$ **UND** $y = ax^2 + bx + c$. (2,5 P)

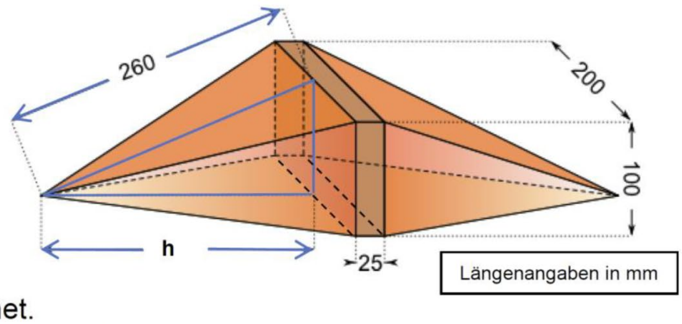
7) Bestimmen Sie rechnerisch den Scheitelpunkt der gegebenen Funktion:
$y = -2x^2 + 8x + 10$ (2,5 P)

8) Bestimmen Sie rechnerisch die <u>Lösungsmenge</u> der folgenden Gleichungen.
   a) $8x^4 - 394x^2 + 98 = 0$ (3,5 P)
   b) $\sqrt{x+4} + 2 = x$ (3,5 P)

9) Das abgebildete Senklot (Längenangaben in mm) besteht aus zwei Kegeln und ist aus massivem Messing mit der Dichte 8,48 g/cm³ gefertigt. Wie viel Gramm wiegt das Senklot? (Skizze nicht massstabsgetreu) (2,5 P)



10) Eine ehemals quadratische Pyramide mit einer Grundfläche von 200mm x 200mm wurde halbiert. Die Hälften wurden auf die Schnittfläche gelegt und mit ihren jeweiligen Grundflächen an einem Quader (200mm x 100mm x 25mm) neu verklebt. Die Raumhöhe der ursprünglichen Pyramide ist mit h gekennzeichnet.



Welches <u>Volumen</u> (<u>in dm³</u>) und welche <u>Oberfläche</u> (<u>in dm²</u>) hat der neu entstandene <u>Gesamtkörper</u>? Achten Sie auf die Einheiten. (Skizze nicht massstabsgetreu). (4 P)

11) Alle Lösungsschritte dieser Aufgabe **ohne Taschenrechner** ersichtlich machen!

a) Vereinfachen Sie so weit wie möglich und geben Sie das Ergebnis ohne negative Exponenten an: $\frac{2^2a^{-1}z^2}{\left(x^2y\right)^3} : \frac{\left(2a\right)^{-3}}{x^{-2}y^{-4}z^{-2}}$ (3,5 P)

b) Vereinfachen Sie so weit wie möglich!
$\sqrt[3]{80x^4} - 2x \cdot \sqrt[3]{\sqrt{100x^2}}$ (2,5 P)

12) Frau Schmidt hat vor 12 Jahren einen bestimmten Geldbetrag zu einem festen Zinssatz von 1,5% pro Jahr angelegt. Heute ist ihr Guthaben durch Zins und Zinseszins auf 17336,45 CHF angewachsen. Wie hoch war der ursprüngliche Betrag, den sie vor 12 Jahren angelegt hatte? (2 P)

13) Ein 100'000 Quadratmeter grosser See sei zu Beginn einer Messung auf einer Fläche von 40 Quadratmetern mit Seerosenblättern bedeckt. Die Fläche vermehre sich exponentiell um 25% pro Woche. Wie viele ganze Wochen würde es dauern, bis ein Viertel des Sees mit Seerosenblättern bedeckt wäre? (2,5 P)

Hinweis: Geben Sie alle Wahrscheinlichkeiten als gekürzte Brüche oder korrekt gerundet auf 4 Stellen nach dem Komma an.

14) Bei einer alten Variante des Zahlenlottos (Lotto di Genua) wurden 5 aus 90 durchnummerierten Kugeln *ungeordnet ohne Zurücklegen* gezogen. Entsprechend musste man bei einem Tipp auch 5 von den 90 Zahlen ankreuzen.

a) Wie viele verschiedenen Tipps waren möglich? (1 P)

b) Wie gross war die Wahrscheinlichkeit, genau 2 richtige Zahlen zu tippen? (1,5 P)

15) In einer Spielzeugkiste befinden sich 4 rote, 5 grüne und 6 blaue Spielzeugautos. Tim zieht blind vier Autos nacheinander ohne Zurücklegen heraus. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, zuerst zwei blaue, dann ein rotes und zuletzt KEIN grünes Auto zu ziehen? (2,5 P)

16) Max bietet seinem Freund Moritz folgendes Spiel an: Zuerst bezahlt Moritz einen Einsatz von 2 CHF. Dann wird viermal eine verbeulte Münze geworfen. Die Wahrscheinlichkeit für Kopf liegt bei 40%, die für Zahl bei 60%. Wenn viermal hintereinander Zahl fällt, bekommt Moritz 8 CHF zurück, wenn er genau zweimal Zahl hat, bekommt er 4 CHF zurück und in allen anderen Fällen verliert Moritz seinen Einsatz. Die Zufallsvariable X misst den Reingewinn von Moritz.

a) Stellen Sie die passende Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X in Form einer Tabelle dar. (2 P)

b) Mit welchem Gewinn/ Verlust muss Moritz langfristig durchschnittlich pro Spiel rechnen? Beantworten Sie die Frage mit Hilfe des Erwartungswertes. (1,5 P)

Summe: 50 Teilpunkte

Musterlösungen

1)

a) $y = -1$

b) $y = \frac{1}{3}x$

c) $y = -2x + 4$

2)

$$\left| \begin{array}{ll} \text{I} & 12x - 8y = 28 \\ \text{II} & 15x - 35 = 10y \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ll} \text{I} & 12x - 8y = 28 \\ \text{II} & 15x - 10y = 35 \end{array} \right| \begin{array}{l} :4 \\ :5 \end{array} \rightarrow \left| \begin{array}{ll} \text{I} & 3x - 2y = 7 \\ \text{II} & 3x - 2y = 7 \end{array} \right|$$

I und II sind identisch → unendlich viele Lösungen → I oder II nach y auflösen

$y = 1{,}5x - 3{,}5$ → $\mathbb{L} = \{(x/y)\ /\ y = 1{,}5x - 3{,}5\}$

3) x: *Alter Grossvater heute* y: *Alter Enkel heute*

$$\left| \begin{array}{ll} \text{I} & x + y = 78 \\ \text{II} & x - 4 = (y - 4) \cdot 6 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ll} \text{I} & x + y = 78 \\ \text{II} & x - 4 = 6y - 24 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ll} \text{I} & x + y = 78 \\ \text{II} & x - 6y = -20 \end{array} \right|$$

→ I-II: 7y = 98 → y = 14 → in I: x + 14 = 78 → x = 64

→ *Alter Grossvater heute*: 64 *Alter Enkel heute*: 14

<u>Alternative :</u>

x: *Alter Grossvater* ***vor 4 Jahren*** y: *Alter Enkel* ***vor 4 Jahren***

$$\left| \begin{array}{ll} \text{I} & x + y = 70 \\ \text{II} & x = y \cdot 6 \end{array} \right|$$ → II in I : 6y + y = 70 → y = 10 → y in II : x = 60

→ *Alter Grossvater heute*: 64 *Alter Enkel heute*: 14

4) $a = \sqrt{100^2 - 45^2} = 89{,}30m$

$\sin\beta = \frac{45}{100} \rightarrow \beta = sin^{-1}\left(\frac{45}{100}\right) \rightarrow \beta = 26.74°$

$\alpha = 180° - 90° - 26{,}74° = 63.26°$

5)

a) Winkel bei S: $\alpha_3 = 180° - 42° - 55° = 83°$
$\frac{7}{\sin 83°} = \frac{x}{\sin 55°}$ $| \cdot sin55°$ → $\frac{7 \cdot \sin 55°}{\sin 83°} = x$ → $x = 5{,}78$ km Entfernung

b) Das Dreieck ist durch 2 gegebene Winkel und eine Seite eindeutig bestimmt.

6) a = 0,5 und S(-3/8) → $y = 0{,}5(x+3)^2 + 8$ (Scheitelform)
→ $y = 0{,}5(x^2 + 6x + 9) + 8$ → $y = 0{,}5x^2 + 3x + 12{,}5$ (Normalform)

7) $y = -2(x^2 - 4x - 5)$
$y = -2\left[x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 5 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right]$
$y = -2[(x-2)^2 - 9]$
$y = -2(x-2)^2 + 18 \rightarrow S(2/18)$

8)

a) $x^2 = z \rightarrow \ 8z^2 - 394z + 98 = 0 \rightarrow \ z_{1;2} = \frac{394 \pm \sqrt{394^2 - 4 \cdot 8 \cdot 98}}{2 \cdot 8} = \frac{394 \pm 390}{16}$
$z_1 = 49 = x^2 \rightarrow x_{1;2} = \pm 7$
$z_2 = \frac{1}{4} = x^2 \rightarrow x_{3;4} = \pm\frac{1}{2} \rightarrow \ \mathbb{L} = \{-7; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 7\}$

b) $\sqrt{x+4} = x - 2 \rightarrow x + 4 = (x-2)^2 \rightarrow x + 4 = x^2 - 4x - 4 \rightarrow 0 = x^2 - 5x$
$\rightarrow 0 = x(x-5) \rightarrow \ x_1 = 0 \ \wedge \ x_2 = 5$
$Probe: x_1 \ falsch \ und \ x_2 \ korrekt \rightarrow \ \mathbb{L} = \{5\}$

9) $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 2{,}05^2 \cdot 0{,}6 = 2{,}64 \ cm^3$
$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 2{,}05^2 \cdot 6{,}1 = 26{,}845 \ cm^3 \rightarrow Summe: 29{,}49 \ cm^3$
$D = \frac{M}{V} \rightarrow M = D \cdot V = 8{,}48 \cdot 29{,}49 = 250{,}04g$

10) $h = \sqrt{260^2 - 100^2} = 240mm$
$V_{Pyr.} = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 2{,}4 = 3{,}2 \ dm^3$
$V_{Quader} = 0{,}25 \cdot 1 \cdot 2 = 0{,}5 \ dm^3 \rightarrow V_{Gesamt} = 3{,}7 \ dm^3$
$O_{Gesamt} = früherer \ Mantel + Schnittflächen \ Pyramide + 4 \ Seitenflächen \ Quader$
$O_{Gesamt} = 4 \cdot \frac{2 \cdot 2{,}6}{2} + 2 \cdot \frac{2 \cdot 2{,}4}{2} + 2(0{,}25 \cdot 1 + 0{,}25 \cdot 2)$
$= 10{,}4 + 4{,}8 + 1{,}5 = 16{,}7 \ dm^2$

11)

a) $\frac{2^2 a^{-1} z^2}{x^6 y^3} \cdot \frac{x^2 y^{-4} z^{-2}}{2^{-3} a^{-3}} = 2^{2-(-3)} a^{-1-(-3)} x^{-2-6} y^{-4-3} z^{2+(-2)} = 2^5 a^2 x^{-8} y^{-7} = \frac{32a^2}{x^8 y^7}$

b) $\sqrt[3]{8 \cdot 10 \cdot x^3 \cdot x} - 2x \cdot \sqrt[3]{10x} = 2x \cdot \sqrt[3]{10x} - 2x \cdot \sqrt[3]{10x} = 0$

12) $B(0) \cdot 1{,}015^{12} = 17336{,}45 \mid : 1{,}015^{12}$

$$B(0) = \frac{17336{,}45}{1{,}015^{12}} = 14499{,}99 \rightarrow 14500{,}00 Fr.$$

13) $40 \cdot 1{,}25^t = 25000 \rightarrow 1{,}25^t = 625 \rightarrow t = log_{1,25}625 = \frac{log625}{log1{,}25} = 28{,}85$

$\rightarrow 29\ ganze\ Wochen$

14) a) $\binom{90}{5} = 43949268\ Tipps$ b) $P(B) = \frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{10\cdot 98770}{43949268} = 0{,}0225$

15) $P(A) = \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{7}{12} = \frac{1}{39}$

16)

a)

e_i	ZZZZ	Zweimal Z	Sonst
x_i	+6 CHF	+2 CHF	-2 CHF
$P(X = x_i)$	$0{,}6^4 = 0{,}1296$	$\binom{4}{2} \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}3456$	$1 - 0{,}1256 - 0{,}3456 = 0{,}5248$

b) $E(X) = 6 \cdot 0{,}1256 + 2 \cdot 0{,}3456 - 2 \cdot 0{,}5248 = 0{,}4192$

Moritz muss durchschnittlich mit einem Gewinn von ca. 42 Rappen pro Spiel auf lange Sicht rechnen.

Kontaktperson

Christoph Eckhardt
christoph.eckhardt@pmstg.ch